IUFM Antilles-Guyane

PLC 1 - Mathématiques

Algèbre - Géométrie

Problème :

Étant donné un ensemble E et une application f de E dans lui-même, on dira que n éléments ordonnés de E, notés $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ forment un cycle pour f si $a_2, \dots, a_n$ sont distincts de a_1 et si :

$$f(a_1) = a_2 \quad f(a_2) = a_3 \quad \dots \quad f(a_{n-1}) = a_n \quad f(a_n) = a_1 .$$

L'image de a_1 par f^h sera notée a_{h+1} pour tout entier positif h (ainsi $a_{h+n} = a_h$). Lorsque E est un espace vectoriel, un endomorphisme f de E sera dit cyclique d'ordre n s'il existe au moins un sous-ensemble de n vecteurs engendrant E et un ordre de rangement tel que ces vecteurs forment un cycle pour f.

De même, une transformation affine g d'un espace affine $\mathcal{E}$ sera dite cyclique d'ordre n s'il existe au moins un sous-ensemble de n points engendrant $\mathcal{E}$ et un ordre de rangement tel que ces points forment un cycle pour g.

Enfin, les espaces vectoriels qui interviennent sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Première Partie :

E désigne un espace vectoriel de dimension 2 et f un endomorphisme de E cyclique d'ordre n.

1°/ Montrer que dans un cycle pour f :

a) 2 vecteurs quelconques sont distincts

b) 2 vecteurs consécutifs forment une base de E

2°/ Etablir les relations :

$$f^n = Id$$

$$f^m \neq Id \quad \text{quel que soit } m \text{ tel que } 0 < m < n.$$

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse construire un cycle pour f à partir d'un vecteur x non nul donné est que x ne soit pas un vecteur propre de f.

3°/ Montrer qu'il existe des bases de E dans lesquelles f sera représenté par une matrice du type $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$

Etablir que :
- * a vaut 1 ou -1.
- * a et b sont indépendants du choix d'une telle base,
- * $f^2 = a\,Id + b f$.

4°/ $\mathbb{R}[X]$ désigne l'anneau des polynômes à une indéterminée X, à coefficients réels. Montrer que l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(f) = 0$ est un idéal principal $I(f)$ de $\mathbb{R}[X]$.
Quel est son générateur ? En déduire que le polynôme $P(X) = X^2 - bX - a$ ne peut pas avoir de racine double.

5°/ Montrer que $P(X)$ a ses racines réelles ssi $f^2 = Id$

6°/ On suppose que $P(X)$ a ses racines non réelles.
Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ un cycle pour f. Montrer qu'il existe une forme bilinéaire symétrique Φ unique telle que :

$$\Phi(a_1, a_1) = 1$$

$$\Phi(f(x), f(y)) = \Phi(x, y) \quad \forall x, y \in E$$

Montrer que Φ définit une structure euclidienne sur E.

7°/ Posons $\Phi(a_1, a_2) = \cos\theta$. Vérifier que cette définition est justifiée. Montrer que :

$$\begin{cases} \Phi(a_k, a_1) = \cos(k-1)\theta & \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \Phi(a_k, a_\ell) = \cos(k-\ell)\theta & \forall k, \ell \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

En déduire en fonction de θ la décomposition de a_k sur la base (a_1, a_2) en utilisant $\Phi(a_k, a_1)$ et $\Phi(a_k, a_2)$.

En déduire l'expression de f^k comme combinaison linéaire de f et de l'identité pour tout entier relatif k (on commencera par traiter le cas où k est positif).

En déduire que :
$$\begin{cases} n\theta \equiv 0 \quad [2\pi] \\ k\theta \not\equiv 0 \quad [2\pi] \quad \text{si } 0<k<n \end{cases}$$
dès que f est cyclique d'ordre n.

Deuxième Partie :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 2, d'espace vectoriel associé E.
Soit g une transformation affine de $\mathcal{E}$ cyclique d'ordre n.

1°/ Montrer que l'endomorphisme f de E associé à g est cyclique d'ordre $n \geq 3$.

2°/ a) Si f est un endomorphisme cyclique d'ordre $n \geq 3$, prouver que $f - I$ est inversible.

b) Si g est une application affine de partie linéaire f, montrer que si $f - Id$ est inversible, alors g admet un et un seul point fixe.

c) En déduire que toute transformation affine g de $\mathcal{E}$ associée à un endomorphisme f cyclique d'ordre $n \geq 3$ de E est cyclique.

3°/ On se donne n et trois points A_1, A_2, A_3. Montrer que si A_1, A_2, A_3 ne sont pas alignés, il existe une transformation affine cyclique d'ordre n pour laquelle A_1, A_2, A_3 sont 3 points consécutifs d'un cycle.

4°/ Quelle relation doit-il y avoir entre les 4 points A_1, A_2, A_3, A_4 pour qu'il existe une transformation affine cyclique d'ordre $n \geq 4$ pour laquelle A_1, A_2, A_3, A_4 soient 4 points consécutifs d'un cycle.

Troisième Partie :

E est maintenant un espace vectoriel réel de dimension 3 et f un endomorphisme de E, cyclique d'ordre n.

1°/ Montrer que a) $f^n = Id$

b) 3 vecteurs consécutifs d'un cycle sont linéairement indépendants et que Id, f, f^2 sont linéairement indépendants.

2°/ Montrer que dans une base convenable f est représenté par une matrice M du type :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

Montrer que a, b, c sont indépendants du choix d'une telle base.
Montrer que $f^3 - cf^2 - bf - a = 0$

3°/ En considérant l'idéal annulateur $I(f) = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, P(f) = 0\}$ de f, montrer que $P(X) = X^3 - cX^2 - bX - a$ divise $X^n - 1$. En déduire que f admet une valeur propre réelle unique et non multiple.

4°/ Lorsque f est direct (ie de déterminant positif), quelle est cette valeur propre réelle ? Calculer a, b, c en fonction de l'argument θ d'une des valeurs propres non réelles de f.

Lorsque f est indirect (ie de déterminant négatif), quelle est la valeur propre réelle ? Y-a-t'il une condition sur n ? Calculer de même a, b et c.

5°/ Soit $a_1, \dots, a_n$ un cycle de f. Démontrer que si f est direct, les différences $a_2 - a_1, \dots, a_n - a_{n-1}, a_1 - a_n$ sont contenues dans le seul sous-espace vectoriel F de E de dimension 2 stable par f et qu'elles forment un cycle pour la restriction de f à ce sous-espace F.

6°/ Montrer qu'on peut munir E d'un produit scalaire rendant f orthogonal lorsque f est direct.

7°/ Soit g une transformation affine cyclique d'un espace affine $\mathcal{E}$ associé à l'espace vectoriel E et soit f l'endomorphisme de E associé à g.

Montrer que :

a) f est cyclique de même ordre que g,

b) g admet un point fixe unique et f est indirect.

Solution

I.1.a f est un cycle d'ordre n. Il existe donc un cycle pour f noté $a_1,\dots,a_n$ tel que $(a_1,\dots,a_n)$ engendre E.

Notons que * $\forall k\in\mathbb{N}$ $\boxed{f^k(a_i)=a_{i+k}}$

* $\forall i\in[2,n]$ $a_i\neq a_1$

Si $a_i=a_j$ avec $\begin{cases} i,j\in\mathbb{N}_n \\ i<j \end{cases}$, on aura $f^{n+1-i}(a_i)=f^{n+1-i}(a_j)$

$$\underbrace{a_{n+1}}_{a_1} = \underbrace{a_{n+1-i+j}}_{a_{1+j-i}} \quad (\text{car } a_{i+n}=a_i \ \forall i)$$

ce qui entraîne $a_1=a_{j-i+1}$ où $1\leq j-i+1\leq n-1+1=n$.

Par hypothèse : $1=j-i+1 \Rightarrow i=j$.

I.1.b Comme E est de dimension 2, il suffit de montrer que 2 vecteurs consécutifs forment un système libre.

Par l'absurde : si a_i et a_{i+1} sont colinéaires, il existerait $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $a_{i+1}=\lambda a_i$ (puisque $a_i\neq 0$. En effet, $a_i=0 \Rightarrow a_{i+1}=f(0)=0$ et a_i, a_{i+1} sont distincts d'après I.1.a). Par récurrence, on aurait :

$$a_{i+k}=\lambda^k a_i \qquad \forall k \text{ variant de } 1 \text{ à } n-1$$

et le système $(a_1,\dots,a_n)$ serait lié. Absurde.

I.2

* $\forall i\in\mathbb{N}_n$ $f^n(a_i)=a_{i+n}=a_i$

$f^n(a_i)=a_i$ pour tout vecteur du système générateur $(a_1,\dots,a_n)$ donné, donc $\boxed{f^n=Id}$

* Si m vérifie $0<m<n$ et $f^m=Id$, on aura $f^m(a_1)=a_{m+1}=a_1$ avec $1\leq m+1\leq n$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

* On doit montrer que si $x\neq 0$:

| $(x,f(x),\dots,f^{n-1}(x))$ cycle pour f $\Leftrightarrow$ x n'est pas un vecteur propre de f.

($\Rightarrow$) Si $(x,f(x),\dots,f^{n-1}(x))$ est un cycle pour f, $(x,f(x))$ est un système libre d'après I.1.b, donc x n'est pas un vecteur propre de f.

(⇐) Si x n'est pas un vecteur propre de f, le système $(x, f(x))$ est libre (car $x \neq 0$). Montrons que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est un cycle pour f :

1) $(x, f(x))$ donc à fortiori $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ engendre le plan E

2) $f(f^i(x)) = f^{i+1}(x)$

3) $\forall i \in [2, n-1] \quad f^i(x) \neq x$:

Sinon $f^i(x) = x$ et $f^i(f(x)) = f(f^i(x)) = f(x)$.
$(x, f(x))$ étant une base de E, on en déduit $f^i = Id$ avec $2 \leq i \leq n-1$, en contradiction avec $n = \inf\{d \in \mathbb{N}^* / f^d = Id\}$.

CQFD

I.3 Soit $a_1, \dots, a_n$ un cycle pour f.
Notons $a_1 = x$ et $a_2 = f(x)$. (où $x \neq$ vect. propre de f)

$(x, f(x))$ est une base de E (I.1.b) et la matrice de f dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

* $f^n = Id$ entraine $(\det A)^n = 1 \iff (-a)^n = 1 \Rightarrow a \in \{\pm 1\}$

* $a = -\det f$ et $b = \operatorname{tr} f = $ trace de f sont entièrement déterminés par f.

* On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ab \\ b & a+b^2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

ie $\boxed{f^2 = a\,Id + b f}$

<u>NB</u> : On peut aussi calculer le polynôme caractéristique de A et appliquer le Th. de Cayley-Hamilton.

I.4

$I = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, P(f) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{R}[X]$ car :

- C'est un sous-groupe :

  $0 \in I$ et si $P, Q \in I$ $(P-Q)(f) = P(f) - Q(f) = 0$ montre que $P - Q \in I$.

- $\forall Q \in \mathbb{R}[X]$ $\forall P \in I$ $QP(f) = Q(f).P(f) = 0 \Rightarrow QP \in I$

I est l'idéal annulateur de f. $\mathbb{R}[X]$ étant un anneau principal, I sera principal. On note $m_f(X)$ le polynôme unitaire qui engendre I. C'est le polynôme minimal de f

$f^2 - bf - a = 0$ entraîne $m_f(X) \mid X^2 - bX - a$ $(*)$

Si $\deg m_f = 1$, alors $m_f(X) = X - \lambda \Rightarrow f = \lambda Id$ ce qui est absurde car $(a_1, f(a_1))$ est libre. Donc $\deg m_f = 2$ et $(*)$ entraîne :

$$m_f(X) = X^2 - bX - a$$

$f^n = Id$ entraîne $m_f(X) \mid X^n - 1$ et montre que $X^n - 1$ ayant n racines simples dans $\mathbb{C}$, $m_f(X) = X^2 - bX - a$ n'aura que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

NB : Ainsi $b^2 + 4a \neq 0$

I.5

Si $f^2 = Id$, $m_f(X) \mid X^2 - 1$ et m_f étant unitaire de degré 2, on aura

$$m_f(X) = X^2 - 1 = X^2 - bX - a \doteq P(X)$$

$P(X) = (X-1)(X+1)$ aura ses racines réelles

Réciproquement, si les racines de $P(X)$ sont réelles (et distinctes d'après I.4), $P(X) = m_f(X)$ divisant $X^n - 1$ qui possède au plus 2 racines réelles ± 1, on aura :

$$P(X) = (X-1)(X+1) = X^2 - 1$$

d'où $P(f) = 0 = f^2 - Id$

$f^2 = Id$.

CQFD

I.6

* On cherche une forme bil. symétrique Φ telle que

$$\begin{cases} \Phi(a_1,a_1)=1 \\ \Phi(f(x),f(y)) = \Phi(x,y) \quad \forall x,y \end{cases} \quad (*)$$

<u>Ici $\Delta = b^2+4a<0 \Rightarrow a=-1$ et $|b|<2$</u>

Travaillons dans la base $(a_1,a_2)=(a_1,f(a_1))$ du I.3.

Si $\begin{cases} x = x_1 a_1 + x_2 a_2 \\ y = y_1 a_1 + y_2 a_2 \end{cases}$

$$\Phi(x,y) = x_1y_1 \underbrace{\Phi(a_1,a_1)}_{=1} + x_2y_2 \underbrace{\Phi(a_2,a_2)}_{=1} + \Phi(a_1,a_2)(x_1y_2+x_2y_1)$$

* <u>Déterminons $\Phi(a_1,a_2)$</u> :

Comme $f(a_2) = a a_1 + b a_2$,

$$\Phi(a_1,a_2) = \Phi(f(a_1),f(a_2)) = \Phi(a_2, aa_1+ba_2) = \underset{-1}{a}\,\Phi(a_1,a_2) + b\underbrace{\Phi(a_2,a_2)}_{1}$$

donc $\boxed{\Phi(a_1,a_2) = \frac{b}{2}}$

* Réciproquement, vérifions que la forme bil. sym. Φ dont la matrice dans la base (a_1,a_2) est

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie $(*)$.

$$\Phi(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \frac{b}{2}x_1y_2 + \frac{b}{2}x_2y_1$$

On a : $\begin{cases} f(x) = x_1 a_2 + x_2 f(a_2) = x_1a_2 + x_2(aa_1+ba_2) = -x_2a_1 + (x_1+bx_2)a_2 \\ f(y) = -y_2a_1 + (y_1+by_2)a_2 \end{cases}$

donc $\Phi(f(x),f(y)) = x_2y_2 + (x_1+bx_2)(y_1+by_2) + \frac{b}{2}\left(-x_2(y_1+by_2) - y_2(x_1+bx_2)\right)$

$$= x_1y_1 + x_2y_2 + \frac{b}{2}x_1y_2 + \frac{b}{2}x_2y_1$$

$$= \Phi(x,y)$$

et, bien sûr, $\Phi(a_1,a_1)=1$.

> <u>2solution</u> : Φ et $E\times E \xrightarrow{\Psi} \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \Phi(f(x),f(y))$ coïncideront car elles coïncident sur la base (a_1,a_2). En effet :
>
> $\Psi(a_1,a_2) \doteq \Phi(f(a_1),f(a_2)) = \Phi(a_1,a_2)$ d'après l'aller (ou un calcul direct)
>
> $\Psi(a_1,a_1) \doteq \Phi(f(a_1),f(a_1)) = \Phi(a_2,a_2) = 1 = \Phi(a_1,a_1)$
>
> $\Psi(a_2,a_2) \doteq \Phi(f(a_2),f(a_2)) = \Phi(-a_1+ba_2, -a_1+ba_2) = \underbrace{\Phi(a_1,a_1)}_{1} + b^2\,\Phi(a_2,a_2)$
>
> $- b\,\Phi(a_2,a_1) - b\,\Phi(a_2,a_1) = 1$

* Φ est un produit scalaire

C'est une f.b.s. non dégénérée car $\begin{vmatrix} 1 & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{b^2}{4} \neq 0$ (car $|b|<2$)

et positive car $\begin{vmatrix} 1-X & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - \frac{b^2}{4} = X^2 - 2X + 1 - \frac{b^2}{4}$

$\Delta' = 1 - \left(1 - \frac{b^2}{4}\right) = \frac{b^2}{4} > 0$ montre que les racines de ce polynôme, ie les invariants de Φ, sont $1 \pm \frac{|b|}{2}$, toutes les 2 positives car $|b|<2$.

2e solution : La signature de Φ est aussi accessible en écrivant $\Phi(x,x)$ comme somme de carrés par la méthode de Gauss.

Posons $q(x) = \Phi(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + b\, x_1 x_2$

$$q(x) = \left(x_1 + \frac{b x_2}{2}\right)^2 + \underbrace{\left(1 - \frac{b^2}{4}\right)}_{>0} x_2^2$$ montre que Φ est définie positive.

I.7 Nous sommes sous les hypothèses de I.6, donc $a=-1$ et $|b|<2$.

On avait $\Phi(a_1, a_2) = \frac{b}{2}$, de sorte que $|\Phi(a_1,a_2)| < 1$.

Il existe donc $\theta \in]0,\pi[$ tel que $\Phi(a_1,a_2) = \cos\theta$

* Montrons que $\Phi(a_k, a_1) = \cos(k-1)\theta$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

C'est vrai pour $k=1$: $\Phi(a_1,a_1) = 1 = \cos 0.\theta$

pour $k=2$: $\Phi(a_2,a_1) = \cos\theta$

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $k-1$, où $k \geq 2$ et cherchons $\Phi(a_k, a_1)$:

$$a_k = f^2(a_{k-2}) = (-Id + 2\cos\theta . f)(a_{k-2})$$
$$= -a_{k-2} + 2\cos\theta . a_{k-1}$$

donc $\Phi(a_k, a_1) = -\Phi(a_{k-2}, a_1) + 2\cos\theta . \Phi(a_{k-1}, a_1)$

$$= -\cos(k-3)\theta + 2\underbrace{\cos\theta . \cos(k-2)\theta}_{\frac{1}{2}(\cos(k-1)\theta + \cos(k-3)\theta)} = \cos(k-1)\theta \quad \text{oui !}$$

* $\forall k, \ell \in \mathbb{N} \quad \Phi(a_k, a_\ell) = \cos(k-\ell)\theta$?

On peut supposer $k \geq \ell$ quitte à écrire $\Phi(a_k, a_\ell) = \Phi(a_\ell, a_k)$

$$\Phi(a_k, a_\ell) = \Phi(f^{k-1}(a_1), f^{\ell-1}(a_1)) = \Phi(f^{k-\ell}(a_1), a_1) = \Phi(a_{k-\ell+1}, a_1) = \cos(k-\ell)\theta$$

* Posons $a_k = x a_1 + y a_2$.

$$\begin{cases} \Phi(a_k, a_1) = \cos(k-1)\theta \\ \Phi(a_k, a_2) = \cos(k-2)\theta \end{cases} \iff \begin{cases} x + y\cos\theta = \cos(k-1)\theta \\ x\cos\theta + y = \cos(k-2)\theta \end{cases}$$

Le déterminant est $D = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta \neq 0$ (car $\theta \in]0, \pi[$). Le système est de Cramer et admet la solution :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sin^2\theta} \begin{vmatrix} \cos(k-1)\theta & \cos\theta \\ \cos(k-2)\theta & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{\overbrace{\cos(k-1)\theta}^{\cos((k-2)\theta+\theta)} - \cos\theta . \cos(k-2)\theta}{\sin^2\theta} \\ \quad = \dfrac{-\sin\theta . \sin(k-2)\theta}{\sin^2\theta} = -\dfrac{\sin(k-2)\theta}{\sin\theta} \\ y = \dfrac{1}{\sin^2\theta} \begin{vmatrix} 1 & \cos(k-1)\theta \\ \cos\theta & \cos(k-2)\theta \end{vmatrix} = \dfrac{\overbrace{\cos(k-2)\theta}^{\cos((k-1)\theta-\theta)} - \cos\theta\cos(k-1)\theta}{\sin^2\theta} \\ \quad = \dfrac{\sin\theta . \sin(k-1)\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta} \end{cases}$$

Ccl :

$$\boxed{a_k = -\frac{\sin(k-2)\theta}{\sin\theta} a_1 + \frac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta} a_2}$$

* Soit $h \in \mathbb{N}^*$. $f^2 = -\mathrm{Id} + 2\cos\theta . f$ montre l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $f^h = \alpha\,\mathrm{Id} + \beta f$.

$$\begin{cases} f^h(a_1) = a_{h+1} = -\dfrac{\sin(h-1)\theta}{\sin\theta} a_1 + \dfrac{\sin h\theta}{\sin\theta} a_2 \\ f^h(a_1) = (\alpha\,\mathrm{Id} + \beta f)(a_1) = \alpha a_1 + \beta a_2 \end{cases}$$

montrent que $\boxed{f^h = \underbrace{-\dfrac{\sin(h-1)\theta}{\sin\theta}}_{\alpha_h} \mathrm{Id} + \underbrace{\dfrac{\sin h\theta}{\sin\theta}}_{\beta_h} f}$ pour $h \in \mathbb{N}^*$

* Si $h \in \mathbb{Z}^*$, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $h + nq = h' > 0$
(On peut, par ex., écrire la div. euclidienne de h par $-n$: $h = -nq + h'$ avec $0 \leq h' < n$), ce qui nous permet de nous ramener au cas où $h' > 0$:

$$f^{h'} = f^{nq+h} = f^{h} \Rightarrow \boxed{f^{h} = \alpha_{h'}\,Id + \beta_{h'}\,f}$$

* Faisons $h = n$ dans l'expression de f^h :

$$f^n = Id = -\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}\,Id + \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\,f$$

d'où $\begin{cases} \sin(n-1)\theta = -\sin\theta \\ \sin n\theta = 0 \end{cases}$

Nécessairement : $\sin(n\theta - \theta) = -\sin\theta$

$$\underbrace{\sin n\theta}_{=0}.\cos\theta - \sin\theta.\cos n\theta = -\sin\theta$$

$$\cos n\theta = 1 \quad (\text{car } \sin\theta \neq 0)$$

$$\boxed{n\theta \equiv 0 \quad [2\pi]}$$

* Faisons $h = m$ où $0 < m < n$.

$$f^m = -\frac{\sin(m-1)\theta}{\sin\theta}\,Id + \frac{\sin m\theta}{\sin\theta}\,f$$

Si $m\theta \equiv 0 \ [2\pi]$, f^m serait égal à Id, ce qui est absurde d'après I.2.
Donc $m\theta \not\equiv 0 \ [2\pi]$ dès que $0 < m < n$.

II.1 Soit $A_1, \dots, A_n$ un cycle pour g.

$$\begin{cases} A_1, A_2, \dots, A_n \text{ engendrent } \mathcal{E} \quad (\text{donc } n \geq 3) \\ g(A_i) = A_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \\ A_i \text{ distinct de } A_1 \quad \forall i \in [2, n] \end{cases}$$

g, affine, transformant la partie $\{A_1, \dots, A_n\}$ en elle-même conservera l'isobarycentre O de $A_1, \dots, A_n$.
La partie linéaire f de g vérifiera donc $f(\vec{OA_i}) = \vec{OA}_{i+1}$. Posons $a_i = \vec{OA_i}$.
On a $\begin{cases} a_1, \dots, a_n \text{ engendrent } E \ (*) \\ f(a_i) = a_{i+1} \\ a_i \text{ distinct de } a_1 \quad \forall i \in [2, n] \end{cases}$ montre que f est cyclique d'ordre $n \geq 3$.

(*) sinon $a_1, \dots, a_n$ colinéaires $\Rightarrow O, A_1, \dots, A_n$ alignés en contradiction avec "$A_1, \dots, A_n$ engendrent $\mathcal{E}$"

II.2

* Lemme : Si f est un endomorphisme cyclique d'ordre $n \geq 3$, alors $f-Id$ est inversible.

Par l'absurde. Si $f-Id$ n'était pas inversible, 1 serait valeur propre de f donc racine du polynôme caractéristique $\chi_f(X)$ de f.

On a vu au I.4 que $\chi_f(X)$, qui n'est autre que le polynôme minimal $m_f(X) = P(X)$ de f, n'a pas de racine double.

Etant de degré 2, admettant la racine réelle 1, $P(X)$ admettra une 2-racine réelle qui ne peut être que -1 (car $P(X) \mid X^n - 1$ et X^n-1 a au plus 2 racines réelles ± 1).

Donc $P(X) = (X-1)(X+1) = X^2 - 1 \Rightarrow P(f) = f^2 - Id = 0$

$\Rightarrow f^2 = Id$ absurde car $n \geq 3$ (II.1)

* g admet un pt fixe unique : On a vu (II.1) que l'isobarycentre O était invariant par g. Le sea $\mathrm{Inv}\, g = \{M \mid g(M) = M\}$ passe par O et sa direction est $\mathrm{Inv} f = \mathrm{Ker}(f - Id) = \{0\}$ (car $f-Id$ inversible), donc $\mathrm{Inv}\, g = \{O\}$.

* Réciproquement, soit $g \in GA(\mathcal{E})$ associée à l'end. cyclique f d'ordre $n \geq 3$.

On a vu que $f-Id$ est inversible. On en déduit que g possède un unique point fixe O.

(En effet, si $\Omega \in \mathcal{E}$ est fixé et $\Omega' = g(\Omega)$,

$g(O) = O \iff \overrightarrow{\Omega' O} = f(\overrightarrow{\Omega O}) \iff (f - Id)(\overrightarrow{\Omega O}) = \overrightarrow{\Omega'\Omega}$ (*)

$f-Id$ étant inversible, $\overrightarrow{\Omega'\Omega}$ étant fixé, il existe 1 et 1 seul pt O vérifiant (*).)

Soit $a_1, \dots, a_n$ un cycle pour f

$A_1, \dots, A_n$ les points de $\mathcal{E}$ définis par $\overrightarrow{OA_i} = a_i$ (où $g(O) = O$)

Alors $\begin{cases} \overrightarrow{Og(A_i)} = f(\overrightarrow{OA_i}) = \overrightarrow{OA_{i+1}} \Rightarrow g(A_i) = A_{i+1} \quad \forall i \\ A_i \text{ distinct de } A_1 \\ A_1, \dots, A_n \text{ engendrent } \mathcal{E} \quad (\text{car } \overrightarrow{OA_1}, \dots, \overrightarrow{OA_n} \text{ engendrent } E)^{(*)} \end{cases}$

ie g est cyclique.

(*) Ou encore : $\forall O \in E \setminus \{A_1, \dots, A_n\}$ $A_1, \dots, A_n$ engendrent $\mathcal{E} \iff \overrightarrow{OA_1}, \dots, \overrightarrow{OA_n}$ eng. E
$\Updownarrow$
$\exists i,j,k$ A_i, A_j, A_k base affine
$\Updownarrow$
$\overrightarrow{A_iA_k}, \overrightarrow{A_iA_j}$ base de E $\iff$ $\exists i,j$ $\overrightarrow{OA_j}, \overrightarrow{OA_k}$ base de E (transf. de vect $\overrightarrow{OA_i}$)

[(*) En effet, le s.e.a engendré par $A_1, \dots, A_n$ contiendra l'isobarycentre O de $A_1, \dots, A_n$ (ie l'unique pt fixe de g). Alors $\overrightarrow{OA_1}, \dots, \overrightarrow{OA_n}$ engendrent E $\Rightarrow$ O, $A_1, \dots, A_n$ engendrent $\mathcal{E}$ est trivial.]

II.3

* A_1, A_2, A_3 non alignés. Soient $a_1 \doteq \overrightarrow{A_1A_2}$ et $a_2 = \overrightarrow{A_2A_3}$. (a_1, a_2) est une base de E.
g cyclique d'ordre n vérifie $g(A_1) = A_2$ et $g(A_2) = A_3$ ssi g vérifie $g(A_1) = A_2$ et si sa partie linéaire f est cyclique d'ordre n et telle que $f(a_1) = a_2$.
(cf II.1 et II.2)

Tout revient donc à construire un endomorphisme f cyclique d'ordre n tel que $f(a_1) = a_2$.

* Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} n\theta \equiv 0 \quad [2\pi] \\ k\theta \not\equiv 0 \quad [2\pi] \quad \text{si } 0<k<n \end{cases}$

Soit f l'endomorphisme de matrice A dans la base (a_1, a_2).

On a vu (I.7) que :

$$f^h = -\frac{\sin(h-1)\theta}{\sin\theta}\,Id + \frac{\sin h\theta}{\sin\theta}\,f \qquad \text{si } h \in \mathbb{N}^*$$

D'où $\begin{cases} f^k \neq Id \quad \text{si } 0<k<n \\ f^n = Id \end{cases}$

$a_1, a_2 = f(a_1), a_3, \dots, a_n$ (où $f(a_i) \doteq a_{i+1}$ si $i \geq 1$) est un cycle pour f car :

1) $a_k \neq a_1$ pour $k > 1$.
Cela provient de I.7 :

$$a_k = -\frac{\sin(k-2)\theta}{\sin\theta}\cdot a_1 + \frac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}\cdot a_2$$

d'où $a_k = a_1 \iff \begin{cases} \sin(k-2)\theta = -\sin\theta \\ \sin(k-1)\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\sin(k-1)\theta}_{=0}\cdot\cos\theta - \sin\theta\cos(k-1)\theta = -\sin\theta$

$\Rightarrow \cos(k-1)\theta = 1 \Rightarrow (k-1)\theta \equiv 0 \quad [2\pi]$ absurde.

2) $a_1, a_2, \dots, a_n$ engendre E car (a_1, a_2) est une base de E.

II.4

* A_1, A_2, A_3, A_4 4 pts de $\mathcal{E}$

. Si A_1, A_2, A_3 alignés, $f(\overrightarrow{A_1A_2}) = \overrightarrow{A_2A_3}$ montre que f admet 1 valeur propre réelle qui ne peut être que ± 1 (car $f^n = Id$), ce qui est absurde (car f cyclique d'ordre $n \geq 3$, et on aurait $f^2 = Id$, cf preuve du lemme du II.2)

. Supposons A_1, A_2, A_3 non alignés. Posons $a_1 = \overrightarrow{A_1A_2}$ et $a_2 = \overrightarrow{A_2A_3}$; (a_1, a_2) est une base.

Tout revient à trouver un endomorphisme cyclique f tel que

$f(a_1) = a_2$
$f(a_2) = \overrightarrow{A_3A_4}$ puis à poser $g(M) = A_2 + f(\overrightarrow{A_1M})$

* Si l'endomorphisme f existe, sa matrice A dans la base (a_1, a_2) sera $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$ (puisque f n'a pas de valeur propre réelle) d'après la partie I, θ vérifiant les conditions de I.7
car $f^2 = Id$ impossible, cf lemme du II.2

Réciproquement, si $\overrightarrow{A_3A_4} = -a_1 + 2\cos\theta\, a_2$ avec $\begin{cases} n\theta \equiv 0 & [2\pi] \\ k\theta \not\equiv 0 & [2\pi] \quad 0<k<n \end{cases}$

alors f de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$ sera cyclique d'ordre n et

$a_1 = \overrightarrow{A_1A_2}$, $a_2 = \overrightarrow{A_2A_3}$, $a_3 = \overrightarrow{A_3A_4}, \dots, a_n$ (où $f(a_i) \doteq a_{i+1}$) sera un cycle pour f (m̂ preuve qu'au II.3)

Ccl : La CNS cherchée est $\begin{cases} A_1, A_2, A_3 \text{ alignés} \\ \text{et} \\ \overrightarrow{A_3A_4} = -\overrightarrow{A_1A_2} + 2\cos\theta\, \overrightarrow{A_2A_3} \end{cases}$

III.1 Soit $a_1, \dots, a_n$ un cycle pour f

$$\begin{cases} a_1, \dots, a_n \text{ engendrent } E \\ f(a_i) = a_{i+1} \\ a_i \neq a_1 \quad \forall i \in [2, n] \end{cases}$$

* $\forall h \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n \quad f^h(a_i) = a_{i+h}$ donc $f^n(a_i) = a_{i+n} = a_i$

Comme $a_1, \dots, a_n$ engendre E, cela prouve bien que $f^n = Id$.

* Montrons que (a_i, a_{i+1}, a_{i+2}) est libre (où $i \in \mathbb{N}_n$)

Si $\alpha a_i + \beta a_{i+1} + \gamma a_{i+2} = 0$, en appliquant f^{n-i+1} on se ramène à :

$$\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 0$$

Si $\gamma \neq 0$, $a_3 = f^2(a_1)$ s'exprime en fct de a_1, a_2 et on vérifie par récurrence sur i que tout vecteur a_i $(i \geq 3)$ appartient à $Vect(a_1, a_2)$:

au rang i $\quad a_i = f(a_{i-1}) = f(\lambda a_1 + \mu a_2) = \lambda f(a_1) + \mu f(a_2)$

$$= \lambda a_2 + \mu a_3 \in Vect(a_1, a_2)$$

Donc $Vect(a_1, \dots, a_n) = Vect(a_1, a_2)$ ce qui est contraire à l'hypothèse : "$a_1, \dots, a_n$ engendrent E de dimension 3".

Finalement $\gamma = 0$. On recommence le m̂ raisonnement avec β pour conclure $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

* Id, f, f^2 sera un système libre car :

$$\alpha Id + \beta f + \gamma f^2 = 0 \Rightarrow \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

le système a_1, a_2, a_3 étant libre.

III.2 La matrice de f dans la base (a_1, a_2, a_3) est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de f est :

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & a \\ 1 & -X & b \\ 0 & 1 & c-X \end{vmatrix} = -X^3 + cX^2 + bX + a$$

Etant indépendant de la base choisie pour le calculer, les coefficients a, b, c ne dépendront que de f.

NB : $c = \mathrm{tr} f$ et $\det f = a$. De $Id^n = f$ on déduit $\det f = \pm 1$ d'où $a = \pm 1$.

* Le Th. de Cayley-Hamilton entraîne $\chi_f(f) = 0$ soit

$$f^3 - cf^2 - bf - a\,Id = 0 .$$

III.3 $I(f) = (m)$ où m est le polynôme minimal de f.

$m \mid \chi_f$ donc $\deg m \leq 3$.

$\deg m = 1 \Rightarrow m(X) = X - \lambda \Rightarrow f = \lambda\, Id$ absurde.

$\deg m = 2 \Rightarrow m(X) = X^2 + \lambda X + \mu$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ donc $m(f) = f^2 + \lambda f + \mu\, Id = 0$
ce qui est absurde car Id, f, f^2 est libre (III.1)

Donc $\deg m = 3$, et $m \mid \chi_f$ entraîne $m = -\chi_f$.

χ_f divisera donc $X^n - 1$. χ_f étant un polynôme à coefficients réels, si λ est une racine complexe non réelle de χ_f, $\bar{\lambda}$ sera aussi racine de f.
Comme χ_f est de degré 3, on en déduit que χ_f possède au moins une racine réelle ± 1 (puisque racine n-ième de l'unité)
$\chi_f \mid X^n - 1$ et toutes les racines de $X^n - 1$ sont simples : toutes les racines de χ_f seront donc simples.
Par suite, f possèdera 3 valeurs propres distinctes : une réelle ($+1$ ou -1) et 2 racines complexes conjuguées $e^{\pm i\theta}$ où $\theta = k\dfrac{2\pi}{n}$ $0 < k < n$

III.4 On a vu que $Id^n = f^n \Rightarrow \det f = \pm 1$.

f direct $\Leftrightarrow \det f = 1 = \begin{vmatrix} \lambda & & 0 \\ & e^{i\theta} & \\ 0 & & e^{-i\theta} \end{vmatrix} = \lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$

f indirecte $\Leftrightarrow \det f = -1 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$

* Si f est directe : $a = 1$

$\lambda = 1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ sont les racines de $\chi_f(X) = X^3 - cX^2 - bX - 1 = 0$

donc $1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} = c \Rightarrow \boxed{c = 1 + 2\cos\theta}$

$1.e^{i\theta} + e^{i\theta}.e^{-i\theta} + e^{-i\theta}.1 = -b \Rightarrow \boxed{b = -(1 + 2\cos\theta)}$

* Si f est indirecte : $a = -1$ et $\lambda = -1$

$\lambda = -1$, $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$ sont les racines de $X^3 - cX^2 - bX + 1$

donc $\begin{cases} c = -1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} = -1 + 2\cos\theta \\ b = -(-1.e^{i\theta} + e^{i\theta}.e^{-i\theta} + e^{-i\theta}.(-1)) = 1 - 2\cos\theta \end{cases}$

La condition sur n est obtenue en notant que $f^n = Id$, donc $(\det f)^n = 1$ et $\det f = a = -1$, donc $(-1)^n = 1$.

Ainsi <u>f est indirecte nécessite n pair</u>.

III.5 Soit f directe : $a = 1$ et les valeurs propres de f sont $1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ avec $\theta = k\frac{2\pi}{n}$ $0 < k < n$.

* <u>Il y a au plus un seul plan stable par f</u> :

Si F est un plan stable par f, le polynôme caractéristique de $f|_F$ divisera celui de f (il suffit d'écrire la matrice de f dans une base (e_1, e_2, e_3) où (e_2, e_3) est une base de F. On obtient $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \; 0 \\ \vdots & \boxed{A} \end{pmatrix}$ où $A = Mat(f|_F ; e_2, e_3)$, donc $\chi_f(X) = \det(M - XI) = (\alpha - X).\det(A - XI) \Rightarrow \chi_{f|_F} \mid \chi_f$)

Les valeurs propres de $f|_F$ seront distinctes et à choisir dans $\{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$.

$\chi_{f|_F} \in \mathbb{R}[X]$ montre que ces valeurs propres seront $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, <u>ie non réelles</u>.

Si F et G sont 2 plans distincts stables par f, la droite $F \cap G$ sera stable par f donc $f|_F$ admettra une valeur propre réelle ; c'est absurde d'après ce qui précède.

* Le sev $F \doteq Vect(a_2 - a_1, \dots, a_n - a_{n-1}, a \quad - a_n)$ est stable par f car :

$\forall i \quad f(a_{i+1} - a_i) = f(a_{i+1}) - f(a_i) = a_{i+2} - a_{i+1}$

$(a_2 - a_1, a_3 - a_2)$ est libre car $\lambda(a_2 - a_1) + \mu(a_3 - a_2) = 0 \Rightarrow -\lambda a_1 + (\lambda - \mu)a_2 + \mu a_3 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \mu = 0$

(a_1, a_2, a_3) étant une base.

Montrons que (a_2-a_1, a_3-a_2) engendre F :

Par récurrence sur i, montrons :

$$\forall i \in [1,n] \qquad a_{i+1}-a_i \in \text{Vect}(a_2-a_1, a_3-a_2)$$

C'est trivial si $i=1$ ou 2. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $i-1$ (avec $i-1<n$). On a :

$$a_{i+1}-a_i = f(a_i - a_{i-1}) = f(\alpha(a_2-a_1)+\beta(a_3-a_2))$$
$$= \alpha(a_3-a_2)+\beta(a_4-a_3) \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

et tout revient à prouver que $a_4-a_3 \in \text{Vect}(a_2-a_1, a_3-a_2)$.

$$a_4 = f^3(a_1) = (cf^2+bf+a)(a_1) = c\,a_3 + b\,a_2 + a\,a_1$$

Donc $a_4-a_3 = (c-1)a_3 + b a_2 + a a_1$ s'écrira $\alpha(a_2-a_1)+\beta(a_3-a_2)$

ssi $\begin{cases} \alpha = -a \\ \alpha-\beta = b \\ \beta = c-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -a \\ \beta = c-1 = -a-b \end{cases}$

C'est possible ssi $c-1=-a-b$, ce qui est le cas puisque III.4 montre que $\begin{cases} a=1 \\ b=-(1+2\cos\theta) \\ c = 1+2\cos\theta. \end{cases}$

CQFD

* $(a_2-a_1, \dots, a_1-a_n)$ est un cycle pour $f|_F$: Il reste seulement à prouver que $a_{i+1}-a_i$ est toujours distinct de a_2-a_1.

Supposons, par l'absurde, que $a_{j+1}-a_j = a_2-a_1$. Alors $f^{j-1}(a_2-a_1)=a_2-a_1$ entraînerait $f^{j-1}(a_3-a_2) = f^{j-1}(f(a_2-a_1)) = f(a_2-a_1) = a_3-a_2$ donc $f|_F^{j-1} = Id_F$

Les valeurs propres de $f|_F$ sont $e^{\pm i\theta}$ où $\theta = k\frac{2\pi}{n}$ $0<k<n$. Elles vérifieront donc $(e^{\pm i\theta})^{j-1}=1$ où $0<j-1<n$.

Si $0<j<n$, $f^j \neq Id$ (sinon $f^j(a_1)=a_{j+1}=a_1$ absurde) donc $(e^{\pm i\theta})^j \neq 1$ ce qui est absurde

III.6

III.5 montre que $f|_F$ est cyclique d'ordre n. La partie I affirme l'existence d'un produit scalaire Φ_F sur F tel que $\Phi_F(a_2-a_1, a_2-a_1) = 1$ et

$\Phi_F(f(x), f(y)) = \Phi_F(x,y) \quad \forall x,y \in F$.

Le sev propre $\mathbb{R}e_1$ associé à la valeur propre 1 de f n'est pas inclus dans le plan F. Donc $E = F \oplus \mathbb{R}e_1$.

Définissons la forme bilinéaire symétrique Φ par :

$$\begin{cases} \Phi(e_1, e_1) = 1 \\ \Phi(x,y) = 0 \quad \forall x \in F \quad \forall y \in \mathbb{R}e_1 \\ \Phi(x,y) = \Phi_F(x,y) \quad si\ x,y \in F \end{cases}$$

On a : $\forall z \in E \quad z = x + \lambda e_1 \quad x \in F \quad \lambda \in \mathbb{R}$

et $\Phi(z, z') = \Phi(x + \lambda e_1, x' + \lambda' e_1) = \Phi(x, x') + \lambda\lambda'$

Clairement :
$$\begin{cases} \Phi(z,z) = \Phi_F(x,x) + \lambda^2 \geq 0 \\ \Phi(z,z) = 0 \Rightarrow z = 0 \\ \Phi(f(z), f(z')) = \Phi(z, z') \quad \text{pour tout } z, z' \in E \end{cases}$$

Φ sera un produit scalaire rendant f Φ-orthogonale.

III.7 a) Soit $A_1, \dots, A_n$ un cycle pour g. L'isobarycentre O de $A_1, \dots, A_n$ sera invariant par g. Si $a_i = \overrightarrow{OA_i}$, on aura :

$f(a_i) = a_{i+1}$

$a_i \neq a_1 \quad i \in [2, n]$

$a_1, \dots, a_n$ engendrent E (car $\overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_n}$ engendrent E par hypothèse et $\forall x \in E \quad \exists \alpha_i \quad x = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1A_i} = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} - \left(\sum_{i=2}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{OA_1}$)

b) On a vu que $g(O)=O$. Si O' était un autre pt invariant par g, on aurait $f(\overrightarrow{OO'})=\overrightarrow{OO'} \Leftrightarrow \overrightarrow{OO'} \in \mathrm{Ker}(f-Id)$

Montrons que $\mathrm{Ker}(f-Id)=\{0\}$.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe $x \neq 0$ tel que $f(x)=x$, ie que f admet la valeur propre 1, ie que f est directe.
Alors f est une application Φ-orthogonale pour le produit scalaire Φ introduit au III.6. C'est donc une rotation d'axe $\mathbb{R}x$. Cela contredit que g soit cyclique car si $A_1 \in E$ est donné, les points $A_1, A_2=g(A_1), \dots, A_n=g^{n-1}(A_1)$ seront coplanaires et ne pourront en aucun cas engendrer l'espace affine $\mathcal{E}$.